MÉMOIRE

SUR LA

PROPAGATION DE LA CHALEUR

DANS LES CORPS SOLIDES,

PAR M. FOURIER (1).

Présenté le 21 décembre 1807 à l'Institut national.

Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomathique de Paris, t. I, p. 112-116, n° 6; mars 1808. Paris, Bernard.

L'auteur de ce Mémoire s'est proposé de soumettre la Théorie de la chaleur à l'Analyse mathématique et de vérifier, par l'expérience, les résultats du calcul. Pour exposer l'état de la question, supposons une barre de métal, cylindrique et d'une longueur indéterminée, plongée par une de ses extrémités dans un fluide entretenu à une température constante : la chaleur se répandra successivement dans la barre; et, sans la perte qui a lieu à sa surface et à son autre extrémité, elle prendrait dans toute son étendue la température constante du foyer; mais, à cause de cette perte, la chaleur ne s'étendra d'une manière sensible que jusqu'à une distance du foyer dépendante de la grosseur de la barre, de la conductibilité du métal et de son degré de poli, qui influe sur le rayonnement; de sorte que des thermomètres placés dans l'éten-

(1) Cet Article, que nous avons déjà signalé dans l'Avant-Propos du Tome I, n'est pas de Fourier. Signé de l'initiale P, il a été écrit par Poisson, qui était un des rédacteurs du *Bulletin des Sciences* pour la partie mathématique. A raison de l'intérêt historique qu'il présente comme étant le premier écrit où l'on ait fait connaître la théorie de Fourier, nous avons cru devoir le reproduire intégralement. G. D.

due de cette distance s'élèveront graduellement et finiront par arriver à un état stationnaire, dans lequel leurs élévations seront d'autant moins grandes qu'ils seront plus éloignés du foyer.

M. Biot a fait voir par une expérience directe (*Physique de Fischer*, p. 84) que ces élévations décroissantes forment une progression géométrique, lorsque les thermomètres sont équidistants.

C'est, en effet, ce qui doit avoir lieu si, d'après le principe connu de Newton, la perte de la chaleur dans l'air, en chaque point de la barre, est proportionnelle à l'excès de la température de ce point sur celle de l'air, et s'il en est de même à l'égard de la chaleur communiquée par une tranche quelconque de la barre à la suivante; l'expérience que nous citons peut donc servir de démonstration à ce principe, le seul que M. Fourier emprunte de la Physique, et sur lequel il appuie toute son Analyse.

Maintenant, si l'on retire le foyer constant de chaleur et que l'on abandonne la barre à elle-même, les thermomètres s'abaisseront, et l'on peut demander quelle sera, après un terme donné, la hauteur de l'un quelconque d'entre eux. On conçoit donc que la distribution de la chaleur dans un corps solide offre deux problèmes principaux à résoudre : 1° ce corps étant soumis à l'action d'un ou plusieurs foyers de chaleur constante, déterminer la température de chacun de ses points, intérieurs ou extérieurs, lorsque cette température sera parvenue à l'état stationnaire; 2° les foyers de chaleur étant supprimés et le corps abandonné à lui-même, ou, plus généralement, le corps ayant été chauffé d'une manière quelconque, déterminer, après un temps donné, la température de chacun de ses points, ce qui fera connaître la loi suivant laquelle s'effectue leur refroidissement.

Cette température varie avec le temps et la position du point auquel elle appartient; elle est donc une fonction des coordonnées de ce point et du temps. M. Fourier obtient, pour la déterminer, une équation aux différences partielles, savoir

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

dans laquelle v est la température, t le temps, x, y, z les trois coordonnées rectangulaires du point, et a un coefficient constant. Cette équation convient à tous les points d'un corps homogène de figure quelconque; mais M. Fourier y joint, dans chaque cas particulier, d'autres équations qui n'ont lieu qu'à la surface, et qui servent à déterminer une partie des arbitraires qu'introduit l'intégration. La recherche de ces nouvelles équations est un point délicat de la Théorie de la chaleur, qui mérite de fixer l'attention des physiciens géomètres.

Lorsque le corps est parvenu à l'état stationnaire, les températures de tous les points sont invariables; on a donc

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

Cette équation, quoique plus simple que la précédente, n'est point encore intégrable sous forme finie.

Après avoir donné les équations générales relatives au mouvement de la chaleur et à son état stationnaire, M. Fourier considère différents cas particuliers, parmi lesquels nous choisirons le suivant, pour faire connaître les procédés d'Analyse qu'il emploie.

On demande la température des différents points d'une lame rectangulaire, d'une longueur indéfinie et d'une épaisseur constante, lorsque cette température est parvenue à l'état stationnaire.

Les côtés de la lame parallèles à la longueur sont entretenus constamment à zéro, qu'on suppose être la température primitive de la lame entière. Les points de l'une de ses extrémités sont des foyers de chaleur constante, de sorte que leur température est donnée et peut être différente d'un point à un autre. On fait abstraction de l'épaisseur de la lame et du rayonnement, en sorte que, en prenant le plan de la lame pour celui des xy, on pourra supprimer la coordonnée z, et l'équation relative à l'état stationnaire se réduira à

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$v = \text{fonct.}(x + y\sqrt{-1}) + \text{fonct.}(x - y\sqrt{-1}).$$

Au lieu de cette intégrale complète, qui a l'inconvénient de renfermer des imaginaires, M. Fourier emploie la somme d'une infinité d'intégrales particulières, savoir

$$\begin{aligned} v = &+ (ae^{-nx} + be^{nx}) \cos ny + (a'e^{-n'x} + b'e^{n'x}) \cos n'y + \ldots \\ &+ (\mathrm{A}e^{-mx} + \mathrm{B}e^{mx}) \sin my + (\mathrm{A}'e^{-m'x} + \mathrm{B}'e^{m'x}) \cos m'y + \ldots, \end{aligned}$$

$a, a', \ldots, b, b', \ldots$; $\mathrm{A}, \mathrm{A}', \ldots, \mathrm{B}, \mathrm{B}', \ldots$; $n, n', \ldots, m, m', \ldots$ étant des constantes arbitraires. Si l'on suppose, pour simplifier, la lame semblablement échauffée de part et d'autre de la ligne qui la partage en deux parties égales dans le sens de sa longueur, et que l'on prenne cette ligne pour axe des x, les sinus $\sin my$, $\sin m'y$, ... devront être exclus de la valeur de v. De plus, en prenant pour unité la demi-largeur de la lame, la condition qu'on ait $v = 0$ quand $y = \pm 1$, quelle que soit la valeur de v, exige que les arbitraires $n, n', n'', \ldots$ soient la suite des quantités $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots$, π désignant la demi-circonférence. Enfin, la température devant décroître à mesure que l'on s'éloigne du foyer de chaleur constante, la valeur de v ne doit pas renfermer les exponentielles $e^{nx}, e^{n'x}, \ldots$ dont les exposants sont positifs; cette valeur deviendra donc

$$(1) \qquad v = ae^{-\frac{\pi x}{2}} \cos \frac{\pi y}{2} + a'e^{-3\frac{\pi x}{2}} \cos 3\frac{\pi y}{2} + a''e^{-5\frac{\pi x}{2}} \cos 5\frac{\pi y}{2} + \ldots.$$

Il ne reste plus que les coefficients $a, a', a'', \ldots$ à déterminer; or, si l'on fixe l'origine des x au foyer de chaleur constante, la valeur de v relative à $x = 0$ sera donnée en fonction de y; soit alors $v = \varphi(y)$, on aura

$$(2) \qquad \varphi(y) = a \cos \frac{\pi y}{2} + a' \cos 3\frac{\pi y}{2} + a'' \cos 5\frac{\pi y}{2} + \ldots.$$

Multipliant de part et d'autre par $\cos(2i+1)\frac{\pi y}{2}$, et intégrant ensuite depuis $y=-1$ jusqu'à $y=+1$, il vient

$$a_i=\int_{-1}^{+1}\varphi(y)\cos(2i+1)\frac{\pi y}{2}\,dy,$$

car il est facile de s'assurer que l'intégrale

$$\int\cos(2i+1)\frac{\pi y}{2}\cos(2i'+1)\frac{\pi y}{2}\,dy,$$

prise depuis $y=-1$ jusqu'à $y=+1$, est nulle, excepté dans le cas de $i=i'$, où elle est égale à 1. Dans quelques cas particuliers, l'intégrale définie devra être prise entre d'autres limites, sans quoi l'on trouverait $a_i=0$, pour toutes les valeurs de i.

Les coefficients a, a', a'', ... étant ainsi déterminés, M. Fourier substitue la série (2) à la fonction $\varphi(y)$, en observant que ces deux quantités ne sont égales que depuis $y=-1$ jusqu'à $y=+1$: hors de ces limites, la série ne coïncidera plus avec la fonction, à moins que les valeurs de la fonction ne soient périodiques comme celles de la série.

Maintenant la série (1) ne renferme plus rien d'inconnu; par conséquent, elle donnera la température de la lame en un point quelconque, ce qu'il s'agissait de trouver. Tous les termes décroissent à mesure que l'on s'éloigne du foyer, le premier beaucoup moins rapidement que les autres; de sorte qu'à une grande distance ceux-ci peuvent être négligés par rapport à ce premier terme, et alors on a simplement

$$v=a\,e^{-\frac{\pi x}{2}}\cos\frac{\pi y}{2};$$

d'où il suit qu'à cette distance la loi des températures devient indépendante du mode d'échauffement du foyer.

Le cas particulier de la lame est le plus simple de ceux que M. Fourier a considérés. C'est, pour ainsi dire, une hypothèse purement mathématique, qui ne saurait avoir lieu dans la nature, et où les conditions relatives aux limites du corps sont de simples conventions.

M. Fourier traite les autres cas qu'il considère par des procédés d'analyse analogues, mais plus compliqués; il remplace de même l'intégrale complète par une somme infinie d'intégrales particulières; et de cette manière la température variable de chaque point du corps, à un instant quelconque, se trouve représentée par une série de termes dont les coefficients s'expriment, comme plus haut, par des intégrales définies. Chacun de ces termes a pour facteur une exponentielle; et, celle dont l'exposant est le plus petit, en les supposant tous réels, décroissant avec beaucoup moins de rapidité que les autres, il s'ensuit qu'après un certain temps ce terme reste seul dans l'expression de la température : alors les températures des points extérieurs et intérieurs commencent à décroître d'une manière régulière, indépendante de la distribution primitive de la chaleur, et en progression géométrique pour des intervalles de temps égaux. C'est, en effet, ce qu'ont trouvé les différents physiciens qui ont déterminé par l'expérience la loi du refroidissement des corps placés dans un air à une température moindre que celle de ces corps; mais, selon M. Fourier, cette loi ne se manifeste pas immédiatement, mais bien à partir de l'époque où la valeur de la température variable peut être censée réduite à son premier terme.

La raison de la progression géométrique qui exprime le refroidissement final d'un corps et, par conséquent, la vitesse de ce refroidissement dépendent des dimensions, de la forme et de la matière du corps. Dans les sphères de très petits diamètres et de même matière, le temps nécessaire pour un abaissement donné de température est proportionnel au diamètre; il croît, au contraire, comme le carré du diamètre, dans les sphères très grandes; il en est de même dans les cubes très petits et les cubes très grands; enfin, en comparant ces temps dans un cube et dans la sphère inscrite, on trouve qu'ils sont entre eux comme 4 est à 5.

Le Mémoire dont nous rendons compte est terminé par le détail des expériences que l'auteur a faites pour vérifier les résultats de son analyse, et qu'il se propose de répéter avec des instruments plus précis. La plus remarquable est celle qui est relative au refroidissement d'un anneau métallique; on observe que bientôt l'anneau parvient à un état dans lequel la somme des températures des deux points placés aux extrémités d'un même diamètre est la même pour tous les diamètres, et qu'une fois parvenu à cet état, il le conserve jusqu'à son entier refroidissement. M. Fourier a vérifié que cette propriété du refroidissement final est indépendante de la distribution primitive de la chaleur dans l'anneau, et sur ce point l'expérience s'est trouvée d'accord avec son analyse qui l'avait conduit au même résultat.

P.